USO DE LA CALCULADORA GRÁFICA TEXAS.
(TI-82, TI-83 y TI-83 Plus)

(Material extraído de la editorial ANAYA)

ÍNDICE DE CONTENIDOS:
(Pincha en el título para acceder directamente.)

1 FUNCIONES ELEMENTALES

La calculadora gráfica te ofrece una gran cantidad de posibilidades a la hora de trabajar con funciones.

- Puedes representar cualquier función: rectas, parábolas, funciones polinómicas de cualquier grado, funciones racionales, funciones radicales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas... e, incluso, funciones definidas "a trozos".

- También puedes obtener coordenadas de puntos interesantes sobre la gráfica (máximos, mínimos, puntos de corte con los ejes, puntos de corte de dos o más funciones...) y tablas de valores.

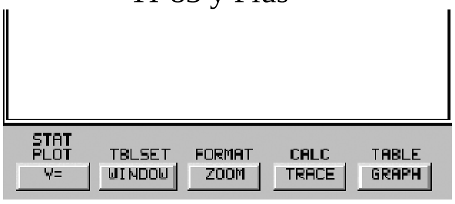
- Puedes estudiar los cambios que se producen en la gráfica de una función cuando sumas una constante, o bien cuando calculas el valor absoluto o cualquier otra transformación.

  Empecemos viendo cómo introducir funciones en la calculadora y algunos otros conceptos fundamentales.

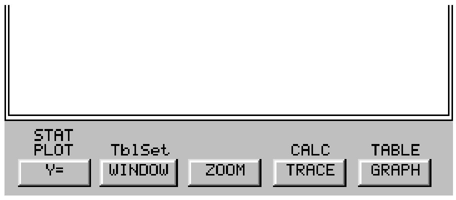
1. TECLAS GRÁFICAS

Se encuentran en la zona más próxima a la pantalla:

TI-83 y Plus



TI-82



Otras teclas importantes para trabajar con funciones:

TI-82:

LINK — Y-VARS

| X, T, θ | | VARS |

TI-83 y TI-83 Plus:

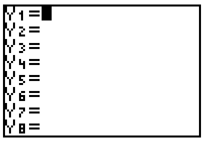
LINK — DISTR

| X, T, θ,n | | VARS |

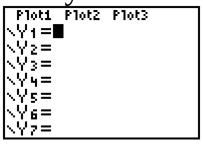
2. INTRODUCIR UNA FUNCIÓN

Pulsa la tecla [Y=]. Aparecerá en la pantalla:

TI-82



TI-83 y TI-83 Plus

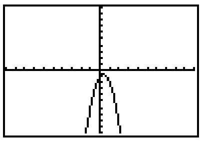


Puedes representar hasta 10 funciones simultáneamente.
Ya está lista para que introduzcas la primera función.
Por ejemplo, si quieres representar $y = -3x^2 + 2x - 1$, escribirás:

[(–)] [3] [X,T,...] [x^2] [+] [2] [X,T,…] [–] [1]

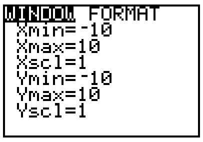
3. VENTANA DE VISUALIZACIÓN

Pulsa [ZOOM] [6] (has seleccionado **Zstandar**).
Aparecerá en la pantalla:

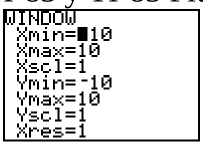


Pulsa la tecla [WINDOW]. Aparecerá en pantalla:

TI-82



TI-83 y TI-83 Plus



En el gráfico anterior los valores de x varían desde el valor de **Xmin** = –10, hasta el valor de **Xmax** = 10. La escala del eje X es el valor de **Xscl** = 1.

Los valores de y varían desde **Ymin** = –10 hasta **Ymax** = 10. La escala del eje Y es el valor de **Yscl**= 1.

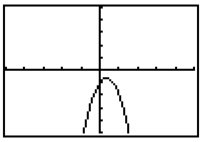
Siempre que selecciones **ZStandar** tendrás esta ventana de visualización de las gráficas.

Vamos a modificar los valores anteriores:

- Con TI-82: pulsa [▼] y teclea [(–)] 5 [ENTER] 5 [ENTER] [▼] [(–)] 5 [ENTER] 5.
- Con TI-83 y 83 Plus no hay que pulsar [▼] al principio.

4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Pulsa la tecla GRAPH y aparecerá la gráfica de la función en la pantalla:

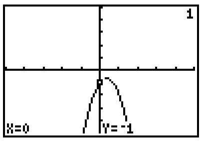


Ahora hemos conseguido la gráfica de la misma función en una ventana más pequeña. Se observa mejor el vértice de la parábola.

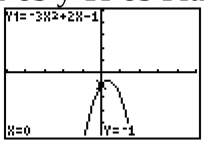
5. COORDENADAS DE PUNTOS DE LA GRÁFICA

Pulsa la tecla TRACE. Aparecerá un cursor sobre la curva y podrás visualizar las coordenadas del punto sobre el que está situado.

TI-82



TI-83 y TI-83 Plus



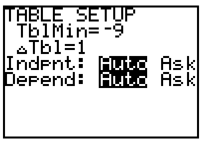
Puedes moverte por la gráfica con las teclas ◀ y ▶.

6. TABLA DE VALORES

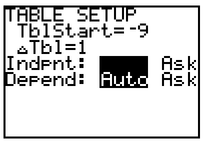
Puedes obtener una tabla de valores de la función (o de las funciones) que estás representando mediante las teclas 2nd [TblSet] (en TI-82) o 2nd [TBLSET] (en TI-83 y TI-83 Plus) y 2nd [TABLE]. Veamos cómo:

Al pulsar la primera de ellas, obtendrás en la pantalla:

TI-82



TI-83 y TI-83 Plus



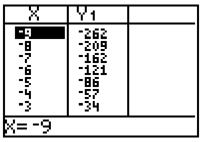
En **TblMin** o **TblStart** introducimos el valor en el que queremos que empiece la tabla de valores; y en **ΔTbl** la diferencia que queremos entre cada valor de *x* y el siguiente (el incremento de x en la tabla). Por ejemplo, si **TblMin = -9** y **ΔTbl = 1,** la tabla empezará en $x = -9$ y seguirá en $x = -8$, $x = -7$ ...

Para **Indpnt** (variable independiente, *x*) y para **Depend** (variable dependiente, *y*), tienes dos opciones:

Auto → Visualización automática de la tabla.
ASK → Visualiza una tabla vacía, donde podemos introducir los valores que queramos.

(Normalmente, elegirás **Auto** en las dos).

Al pulsar 2nd [TABLE**]** obtienes la tabla de valores de la función (o de las funciones) que tengas.



(Recuerda que puedes moverte por la pantalla con las teclas ◀, ▶, ▲ y ▼).

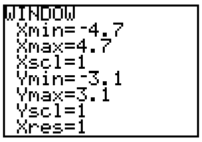
Puedes obtener más valores de los que en principio aparecen en pantalla moviéndote con ▲ y ▼ con el cursor situado en la columna de X.

Cuando tengas una tabla para más de dos funciones, podrás ver los valores de $\mathbf{Y_3}$, $\mathbf{Y_4}$, ... moviéndote por la pantalla con ▶).

7. OTRAS TECLAS DE INTERÉS

ZOOM 5 (**ZSquare**)

Fija las variables WINDOW del siguiente modo:



En el gráfico, la longitud de las escalas en los ejes X e Y son iguales. Solo en esta opción los círculos se ven como círculos.

ZOOM 7 (**Ztrig**)

Fija las variables WINDOW para representar funciones trigonométricas.

CLEAR

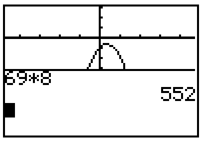
- Si estás en la pantalla gráfica, borra el gráfico y sales a la pantalla principal.
- Si estás en el editor de funciones (has pulsado Y=), borra la línea-función en la que está el cursor.

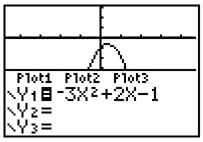
MODE

Radian/Degree → Radianes/Grados para funciones trigonométricas.

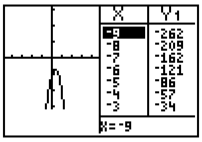
Full Screen/Split (con TI-82) → La opción **Full Screen** (pantalla entera) utiliza toda la pantalla para visualizar un gráfico o una pantalla de edición.
La opción **Split** (pantalla partida) visualiza la gráfica actual en la parte superior de la pantalla, y la pantalla principal o la pantalla de edición, en la parte inferior.

Full/Horiz/G-T (con TI-83 y 83 Plus) → La opción **Full** (pantalla entera) utiliza toda la pantalla para la representación de un gráfico o para la pantalla de edición.
Con la opción **Horiz** seleccionada vemos:





Con la opción **G-T** (gráfico-tabla) vemos en la pantalla:



Pulsando 2nd [TABLE] o TRACE pasaremos de la gráfica a la tabla, y viceversa, y con ◀, ▶, ▼ y ▲ podremos desplazarnos por ellas.

Para cambiar opciones en MODE:

- Pulsa MODE.
- Utiliza ◀, ▶, ▲ y ▼ para desplazarte por la pantalla y sitúa el cursor sobre la opción deseada.
- Pulsa ENTER para seleccionar el modo.

(Tú mismo podrás ir descubriendo muchas más posibilidades).

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

EJEMPLO 1. Representación de funciones

Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = -2x + 7$ **b)** $y = \dfrac{4x+3}{x+1}$ **c)** $y = \sqrt{2-x}$

d) $y = \sqrt[3]{-x}$ **e)** $y = e^{x}$ **f)** $y = 2^{x+1}$

g) $y = \ln x$ **h)** $y = \log\ x$ **i)** $y = \log_2 x$

Solución:

- En todos los casos se deben dar los siguientes pasos:

1.°) Pulsa [Y=] (si hay alguna función escrita, la podemos borrar con [CLEAR]). El cursor parpadeará en $\mathbf{Y_1=}$.

2.°) Introduce la función en cada caso (después veremos la forma).

3.°) Pulsa [GRAPH] y la gráfica aparecerá en la pantalla.

Recuerda que puedes cambiar el intervalo de valores que consideras para x y para y, así como la escala de ambos en [WINDOW]. En algunos caso será necesario cambiar los valores para apreciar bien la función.

- Veamos cómo introducir la función en cada caso:

a) [(–)] [2] [X,T,…] [+] [7]
b) [(] [4] [X,T,…] [+] [3] [)] [÷] [(] [X,T,...] [+] [1] [)]
c) [2nd] [√] [(] [2] [–] [X,T,…] [)]
d) [(] [(–)] [X,T,…] [)] [^] [(] [1] [÷] [3] [)]
e) [2nd] [e^x] [X,T,...]
f) [2] [^] [(] [X,T,…] [+] [1] [)]
g) [LN] [X,T,…]
h) [LOG] [X,T,…]
i) [(] [LOG] [X,T,…] [)] [÷] [(] [LOG] [2] [)]

EJEMPLO 2. Gráficas con la escala adecuada

Representa gráficamente la función $y = x^2 - 3x + 15$**.**

- Pulsamos [Y=] (si hay alguna función escrita, bórrala con [CLEAR]). El cursor parpadeará en $\mathbf{Y_1=}$.

- Introduce la función escribiendo:

[X,T,...] [x^2] [–] [3] [X,T,…] [+] [1] [5]

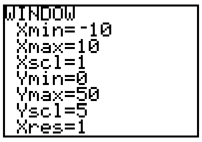
- Pulsa $\boxed{\text{ZOOM}}$ $\boxed{6}$ y verás que no aparece la gráfica en la pantalla. Tal vez sea porque los intervalos de valores de x e y no son los adecuados.

- Consulta la tabla de valores de la función pulsando $\boxed{\text{2nd}}$ [TABLE**]** (puedes moverte por la tabla para obtener más valores pulsando las teclas $\boxed{\blacktriangle}$ y $\boxed{\blacktriangledown}$) y verás que:

X	Y_1
–2	25
–1	19
0	15
...	...

Observa que todos los valores de $\mathbf{Y_1}$ son mayores que 10. Por eso la gráfica no aparece en la pantalla.

- Introduce los valores adecuados para los extremos de la ventana gráfica, pulsando $\boxed{\text{WINDOW}}$. Por ejemplo:



Pulsa $\boxed{\text{GRAPH}}$ y obtendrás la gráfica.

EJEMPLO 3. Transformaciones de funciones

a) Representa gráficamente la siguiente función:

$f(x) = x^2 - 3x$, **para** $-5 < x < 5$; $-5 < y < 5$

b) Representa $y = f(x) + 2$ **en los mismos ejes. ¿Qué observas?**

c) Representa $y = f(x+3)$ **en los mismos ejes que** $f(x)$**. ¿Qué observas?**

d) Representa $y = |\, f(x) \,|$**. ¿Qué observas?**

a) • Pulsa $\boxed{\text{Y=}}$ (si hay alguna función, la podemos borrar con $\boxed{\text{CLEAR}}$). El cursor parpadeará en $\mathbf{Y_1}$**=**.

- Introduce la función: $\boxed{\text{X,T,}\theta}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{X,T,}\theta}$

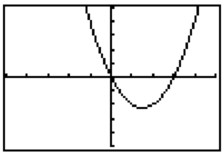
- Introduce el intervalo de valores en el que varían x e y pulsando $\boxed{\text{WINDOW}}$ (nos movemos por la pantalla con las teclas $\boxed{\blacktriangleleft}$, $\boxed{\blacktriangleright}$, $\boxed{\blacktriangle}$ y $\boxed{\blacktriangledown}$):

En **Xmin=** escribimos $\boxed{(-)}$ $\boxed{5}$.
En **Xmax=** escribimos 5.
En **Xscl=** escribimos 1.

En **Ymin=** escribimos [(–)] [5].
En **Ymax=** escribimos 5.
En **Yscl=** escribimos 1.

Después de cada valor pulsamos [ENTER] o [▼].

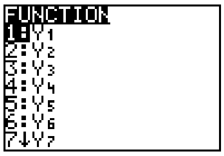
- Pulsa [GRAPH]. Aparecerá en la pantalla la gráfica buscada.



b) • Pulsa [Y=]. Con [▼] sitúate en $\mathbf{Y_2=}$ y escribe: $\mathbf{Y_1}$ [+] [2]

Para escribir $\mathbf{Y_1}$.
Con TI-82 pulsa: [2nd] [Y-VARS] [1]
Con TI-83 y TI-83 Plus pulsa: [VARS] [▶] [1]

Aparecerá la pantalla:



Pulsa [1] para seleccionar la función Y_1.

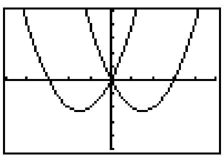
- Pulsa [GRAPH] .

Observa que la segunda gráfica es idéntica a la primera, pero trasladada 2 unidades hacia arriba.

c) • Pulsa [Y=]. Con [▼] sitúate en $\mathbf{Y_2=}$. Con [CLEAR] borra la función anterior e introduce $f(x+3)$ escribiendo:

[(] [X,T,...] [+] [3] [)] [x^2] [–] [3] [(] [X,T,…] [+] [3] [)]

- Pulsa [GRAPH].



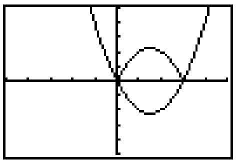
Observa que la segunda gráfica es idéntica a la primera, pero trasladada 3 unidades a la izquierda.

d) • Pulsa [Y=]. Borra las funciones que hay con [CLEAR] (para moverte por la pantalla, usa [◄], [►], [▲] y [▼]).

Introduce la función $|f(x)|$ escribiendo, con TI-82, [2nd] [ABS] **Y_1** y, con TI-83 y TI-83 Plus, [MATH] [►] [1] Y_1.

(Para escribir **Y_1** ver apartado b)

• Pulsa [GRAPH]:



Observa que la parte de $f(x)$ que era positiva (estaba por encima del eje X) queda como estaba, y que la parte que era negativa es simétrica respecto al eje X de la función $f(x)$.

EJEMPLO 4. Funciones inversas

Representa en los mismos ejes las funciones

$$f(x) = 2^x; \quad f^{-1}(x) = \log_2 x; \quad y = x$$

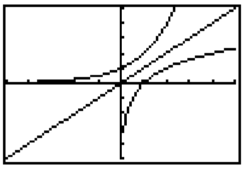
para comprobar que una función y su inversa son simétricas respecto de la recta $y = x$.

- Pulsa [Y=] y borra las funciones que hay con [CLEAR] (nos movemos por la pantalla con las teclas [◄], [►], [▲] y [▼]).
- Introduce las tres funciones:

  En **Y_1=**, escribe: [2] [^] [X,T,...].

  En **Y_2=**, escribe: [( ] [LOG] [X,T,...] [ )] [÷] [( ] [LOG] [2] [ )]

  En **Y_3=**, escribe: [X,T,...]
- Pulsamos [GRAPH] (o [ZOOM] [6]).



La gráfica superior es $f(x) = 2^x$, la inferior es $f^{-1}(x) = log_2{}^x$ y la recta $y = x$ es el eje de simetría de ellas.

EJEMPLO 5. Funciones definidas a trozos

Representa gráficamente

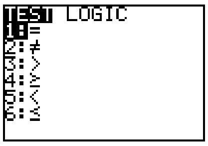
$$y = \begin{cases} -2 \text{ si } x < 0 \\ x - 2 \text{ si } 0 \le x < 4 \\ 2 \text{ si } x \ge 4 \end{cases}$$

- Para poder representar funciones a trozos, debes “preparar” la calculadora previamente:

  Pulsa $\boxed{\text{MODE}}$ y selecciona **Dot** (sitúa el cursor en **Dot,** moviéndote por la pantalla con $\boxed{\blacktriangleleft}$, $\boxed{\blacktriangleright}$, $\boxed{\blacktriangle}$ y $\boxed{\blacktriangledown}$, y pulsa $\boxed{\text{ENTER}}$).

  Pulsa $\boxed{\text{Y=}}$ y borra las funciones que haya con $\boxed{\text{CLEAR}}$.

  NOTA: Para escribir $<, \le, >, \ge$ seguimos los siguientes pasos:
  Pulsa $\boxed{\text{2nd}}$ [TEST]. Aparecerá en la pantalla:

  Pulsando el número de la izquierda, seleccionamos el símbolo correspondiente. Si, por ejemplo, pulsas 5, aparecerá <).

- Introduce la función: pulsa $\boxed{\text{Y=}}$ y $\boxed{\text{CLEAR}}$ para borrar lo que hubiera en Y_1.

  1.ª expresión:

  $\boxed{(-)}$ 2 $\boxed{(}$ $\boxed{\text{X,T,…}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ [TEST] $\boxed{5}$ 0 $\boxed{)}$
  $\boxed{+}$

  2.ª expresión:

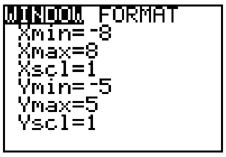
$\boxed{(}$ $\boxed{\text{X,T,…}}$ $\boxed{-}$ 2 $\boxed{)}$ $\boxed{(}$ 0 $\boxed{\text{2nd}}$ [TEST] $\boxed{6}$ $\boxed{\text{X,T,…}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{X,T,…}}$
$\boxed{\text{2nd}}$ [TEST] $\boxed{5}$ 4 $\boxed{)}$
$\boxed{+}$

3.ª expresión:

2 $\boxed{(}$ $\boxed{\text{X,T,...}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ [TEST] $\boxed{4}$ 4 $\boxed{)}$

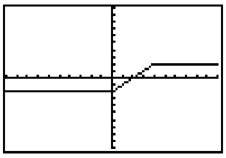
- Observa atentamente cómo separamos cada expresión con el signo $\boxed{+}$ y cómo especificamos los valores que toma x en cada “trozo”.

- Introduce el intervalo en el que quieres que tomen valores x e y pulsando $\boxed{\text{WINDOW}}$. Por ejemplo:

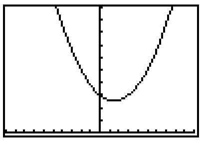


- Pulsa $\boxed{\text{GRAPH}}$.

Si pulsas $\boxed{\text{ZOOM}}$ $\boxed{6}$, observarás que x e y toman valores entre -10 y 10.



NOTA: Cuando termines de dibujar funciones definidas a “trozos”, vuelve a poner la calculadora en $\boxed{\text{MODE}}$ **Connected.**



2 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS

La calculadora gráfica también puede serte muy útil para comprender el concepto de límite, para calcular límites, para ver la posición de una curva con respecto a sus asíntotas y para estudiar la continuidad de funciones. Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 1. Cálculo del límites

Halla los siguientes límites y representa gráficamente la información obtenida:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(7+x-x^3)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{(x-1)^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{1-x}$

d) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x}{1-x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x}{1-x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x}{1-x}$

a) Vamos a representar la función $y=7+x-x^3$ y ver a qué “se van acercando” los valores de y cuando “x se hace grande”:

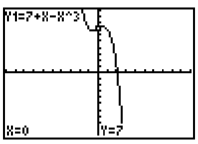
- Pulsa $\boxed{\text{Y=}}$ (si hay alguna función escrita, la podemos borrar con $\boxed{\text{CLEAR}}$).
- Introduce la función:

$\boxed{7}\ \boxed{+}\ \boxed{\text{X,T,...}}\ \boxed{-}\ \boxed{\text{X,T,...}}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{3}$

- Pulsa $\boxed{\text{ZOOM}}$ $\boxed{6}$ y $\boxed{\textbf{TRACE}}$. Aparecerá la gráfica de la función con el cursor sobre la curva, y podrás visualizar las coordenadas del punto sobre el que está situado.
- Puedes moverte por la gráfica con las teclas $\boxed{\blacktriangleleft}$ y $\boxed{\blacktriangleright}$.
- Si vas pulsando $\boxed{\blacktriangleright}$, observarás que, a medida que aumenta el valor de x, y se va “acercando” a $-\infty$; por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}(7+x-x^3)=-\infty$$

- Vemos directamente en la gráfica que la representación es:



b) Representamos la función $y=\dfrac{3}{(x-1)^2}$ y vemos a qué "se van acercando" los valores de y cuando "x se hace grande".

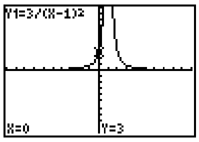
- Pulsa $\boxed{\text{Y=}}$ y borramos las funciones que haya con $\boxed{\text{CLEAR}}$.
- Introduce la función:

$$\boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{(}\ \boxed{\text{X,T,...}}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{)}\ \boxed{x^2}$$

- Pulsa $\boxed{\text{ZOOM}}$ $\boxed{6}$ y $\boxed{\text{TRACE}}$. Aparecerá la gráfica de la función con el cursor sobre la curva y podrás visualizar las coordenadas del punto sobre el que está situado.
- Si pulsas repetidamente $\boxed{\blacktriangleright}$ para moverte por la gráfica, observarás que, a medida que aumenta el valor de x, la y se aproxima cada vez más a cero. Por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{(x-1)^2}=0$$

Además, vemos que se aproxima a cero, tomando valores mayores que cero. La representación es:



c), d), e), f) Vamos a representar la función $y=\dfrac{2x}{1-x}$ y ver qué sucede en cada uno de los cuatro límites propuestos.

- Pulsa $\boxed{\text{Y=}}$ (borramos las funciones que haya con $\boxed{\text{CLEAR}}$).
- Introduce la función:

$$\boxed{2}\ \boxed{\text{X,T,...}}\ \boxed{\div}\ \boxed{(}\ \boxed{1}\ \boxed{-}\ \boxed{\text{X,T,}\theta}\ \boxed{)}$$

- Pulsa $\boxed{\text{ZOOM}}$ $\boxed{6}$ y $\boxed{\text{TRACE}}$. Aparecerá la gráfica de la función con el cursor sobre la curva y podrás visualizar las coordenadas del punto sobre el que está situado.
- Pulsando $\boxed{\blacktriangleleft}$ o $\boxed{\blacktriangleright}$ puedes moverte por la curva.
- Si vas hacia la izquierda (pulsando $\boxed{\blacktriangleleft}$) verás que, a medida que x se aproxima a $-\infty$, la y va tomando valores próximos a -2 (pero mayores que -2). Por tanto:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1-x}=-2$$

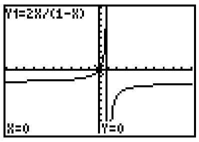
- Al situarte en $x=3$, vemos que $y=-3$. Por tanto:

$$\lim_{x\to3}\frac{2x}{1-x}=-3$$

Puedes comprobarlo haciendo una tabla de valores próximos a $x = 3$

- Cuando te aproximas a 1 por la izquierda, la y tiende a $+\infty$; y, cuando nos acercamos por la derecha, la y tiende a $-\infty$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{1-x} = +\infty \, ; \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{1-x} = +\infty$$



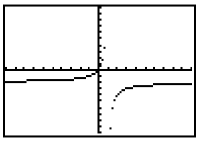
Compruébalo con una tabla de valores próximos a $x = 1$.

La línea vertical que aparece en la gráfica no pertenece a la función.

Pulsa MODE; está seleccionada la opción **Connected**, según la cual la calculadora representa puntos de la función y los une.

Selecciona **Dot**. Ahora la calculadora solo representa los puntos que calcula para la ventana gráfica definida.

Representa con GRAPH.



<u>EJEMPLO 2. Posición de una curva respecto a sus asíntotas</u>

Halla las asíntotas de la siguiente función y sitúa la curva con respecto a ellas:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}}$$

- Representemos gráficamente la función:

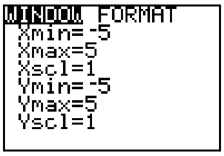
  - Pulsa Y= (si hay alguna función escrita, bórrala con CLEAR).

  - Introduce la función:

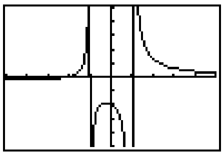
(X,T,... + 2) ÷ (X,T,... x^2 – 1)

  - Vamos a dar valores a x y a y entre –5 y 5 para que se aprecie más claramente la función:

- Pulsa WINDOW e introduce los valores:



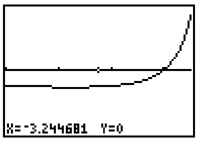
- Selecciona MODE **Connected**.
- Pulsa GRAPH y obtén la gráfica (aparecerán dos líneas verticales).
- Observando la gráfica, verás que la función tiene dos asíntotas verticales: $x=-1$, $x=1$, y una asíntota horizontal: $y=0$. Además, vemos la posición de la curva respecto a ellas:



Para observar mejor el comportamiento cuando $x\to-\infty$ pulsa ZOOM 1 **(Zbox)**.

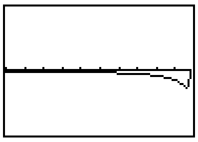
Aparece un cursor en $x = 0$, $y = 0$.

Pulsa ◀ para desplazarlo hacia la izquierda hasta llegar hasta $x = -5$.
Pulsa ▲ para subirlo por encima del eje X hasta, aproximadamente, $y = 0.5$.
Pulsa ENTER y pulsamos ▶ para volver a llevarlo a la derecha, hasta $x = -1.5$, aproximadamente.
Pulsa ahora ▼ hasta $y = -0.5$, más o menos. En la pantalla tenemos un rectángulo dentro del cual está la parte de gráfica que queremos observar. Este rectángulo será la nueva ventana gráfica. Pulsa ENTER.



Volvemos a modificar la ventana: pulsa WINDOW e introduce los valores
Xmin = –100 ; Xmax = –2 ; Xscl = 10

Deja igual los valores de Y. Pulsa GRAPH.



Si pulsas TRACE y recorres los puntos de la gráfica, verás que la función tiene un mínimo cerca de $X = -4$.

Podríamos expresarlo mediante límites, escribiendo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$$

EJEMPLO 3. Cálculo de límites utilizando tabla de valores

Calcula los siguientes límites:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to1^-}\frac{2x}{x-1} \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to1^+}\frac{2x}{x-1} \qquad \textbf{c)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1} \qquad \textbf{d)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-1}$$

a) y b)

- Empezamos representando la función $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$. Para ello:

  - Pulsa $\boxed{\text{Y=}}$ (si hay alguna función escrita, bórrala con $\boxed{\text{CLEAR}}$).

  - Introduce la función:

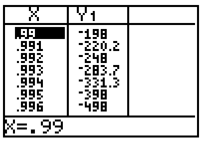
$$\boxed{2}\ \boxed{\text{X,T,...}}\ \boxed{\div}\ \boxed{(}\ \boxed{\text{X,T,...}}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{)}$$

  (Si quisieras ver la gráfica, pulsarías $\boxed{\text{GRAPH}}$ o $\boxed{\text{TRACE}}$, pero vamos a calcular los límites observando y trabajando con la tabla de valores).

- Como queremos calcular en a) y en b) los límites laterales en $x = 1$ vamos a construir una tabla con valores "próximos" a 1:

  - Pulsa $\boxed{\text{2nd}}$ **[**TBLSET**]**: (1)
    En **TblStart=** introduce **0.99**, y, en **ΔTbl=**, introduce **0.001**. (2)
    (En **Indpnt** y en **Depend** selecciona **Auto**, si no está ya seleccionado).

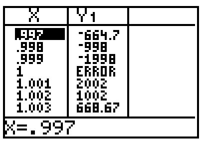
  - Pulsa $\boxed{\text{2nd}}$ **[**TABLE**]** para ver la tabla de valores. Obtendrás:



X	Y1
.99	-198
.991	-220.2
.992	-248
.993	-283.7
.994	-331.3
.995	-398
.996	-498

X=.99

  Pulsa $\boxed{\blacktriangledown}$ para moverte por la tabla y poder obtener más valores. Si pulsas $\boxed{\blacktriangledown}$ repetidas veces, obtendrás los siguientes valores:



X	Y1
.997	-664.7
.998	-998
.999	-1998
1	ERROR
1.001	2002
1.002	1002
1.003	668.67

X=.997

  En $x=1$, obtienes **ERROR**, pues $x=1$ no está en el dominio. Además, vemos que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

c) Para calcular este límite, vamos a construir una tabla en la que x vaya tomando valores "grandes". Por ejemplo:

- Pulsa $\boxed{\text{2nd}}$ **[TBLSET]**: (1)

  En **TblStart=** escribe 1000. (2)
  En Δ**Tbl=** escribe 1000.

- Pulsa $\boxed{\text{2nd}}$ [TABLE] y obtendrás la siguiente tabla:

X	Y1	
1000	2.002	
2000	2.001	
3000	2.0007	
4000	2.0005	
5000	2.0004	
6000	2.0003	
7000	2.0003	

X=1000

Concluimos que:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ (además la curva se sitúa por encima de la asíntota horizontal $y = 2$).

d) Pulsa $\boxed{\text{2nd}}$ **[TBLSET]**: (1)

En **TblStart=** escribe $\boxed{(-)}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}$ (2)
En Δ**Tbl=** escribe $\boxed{(-)}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}$

Pulsa $\boxed{\text{2nd}}$ **[TABLE]** y obtenemos la siguiente tabla

X	Y1	
-1000	1.998	
-2000	1.999	
-3000	1.9993	
-4000	1.9995	
-5000	1.9996	
-6000	1.9997	
-7000	1.9997	

X=-1000

Por tanto:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$
(además la curva se sitúa por debajo de la asíntota horizontal $y = 2$).

EJEMPLO 4. Continuidad

Estudia la continuidad de la siguiente función en $x = 1$:

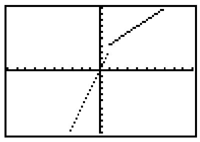
$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si} \quad x \le 1 \\ x + 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- Prepara la calculadora para poder dibujar funciones "a trozos" pulsando $\boxed{\text{MODE}}$ y seleccionando **Dot** (sitúate en **Dot** moviéndote por la pantalla con $\boxed{\blacktriangledown}$ y $\boxed{\blacktriangleright}$, y pulsa $\boxed{\text{ENTER}}$).

- Pulsa $\boxed{\text{Y=}}$ y borra las funciones que haya con $\boxed{\text{CLEAR}}$. Introduce la función:

$$\underbrace{\boxed{3}\ \boxed{\text{X,T,...}}\ \boxed{(}\ \boxed{\text{X,T,...}}\ \underbrace{\boxed{\text{2nd}}\ [\text{TEST}]\ \boxed{6}}_{\leq}\ \boxed{1}\ \boxed{)}}_{\text{1.ª expresión}}\ \boxed{+}\ \underbrace{\boxed{(}\ \boxed{\text{X,T,...}}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{)}\ \boxed{(}\ \boxed{\text{X,T,...}}\ \underbrace{\boxed{\text{2nd}}\ [\text{TEST}]\ \boxed{3}}_{>}\ \boxed{1}\ \boxed{)}}_{\text{2.ª expresión}}$$

- Pulsa $\boxed{\text{ZOOM}}$ $\boxed{6}$.



- Vemos que $f(x)$ no es continua en $x = 1$ puesto que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 \quad \neq \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$$

Pulsa $\boxed{\text{TRACE}}$ y recorre la gráfica o construye una tabla de valores próximos a $x = 1$ para comprobarlo (ΔTbl = 0.01).

3 INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES.

Con la ayuda de la calculadora gráfica puedes:

- Calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo.
- Calcular la derivada de una función en un punto (de forma aproximada).
- Localizar los puntos de tangente horizontal ($f'(x) = 0$).
- Dibujar la recta tangente a una función en un punto.
- Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de una función.
- Obtener las asíntotas y ver la posición de la curva respecto a ellas.
- Representar cualquier función; entre otras, las polinómicas y las racionales.

Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 1. Tasa de variación media

Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el intervalo [1, 3] e indica si dicha función crece o decrece en ese intervalo.

- Para poder hallar la T.V.M., necesitas saber:

  Cuál es la función $\rightarrow$ $f(x)=\dfrac{1}{x}$

  Cuál es la variable $\rightarrow$ x

  Cuál es el centro del intervalo $\rightarrow$ 2

  Cuál es el radio del intervalo (la mitad de su longitud) $\rightarrow$ 1

  Una vez que lo tengamos claro, introduce los valores en la calculadora como sigue:

  - Pulsa $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{8}$ y en la pantalla principal aparecerá:

    n Deriv (

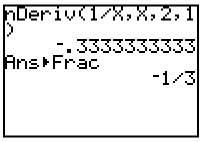
- Escribe los datos necesarios:

$$\underbrace{1\ \boxed{\div}\ \boxed{\text{X,T,...}}}_{\text{Función}}\ \boxed{,}\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Variable}}}{\boxed{\text{X,T,...}}}\ \boxed{,}\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Centro del}\\ \text{intervalo}}}{2}\ \boxed{,}\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Radio del}\\ \text{intervalo}}}{1}\ \boxed{)}$$

También puedes introducir $\frac{1}{x}$ en Y_1 y teclear

$\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{8}$ $\boxed{\text{VARS}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{X,T,…}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{2}$ $\boxed{,}$ $\boxed{1}$ $\boxed{)}$ (1)

- Pulsa $\boxed{\text{ENTER}}$ y obtendrás **-.333333333**
- Si lo quieres expresar en forma de fracción, pulsa $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ y obtendrás **–1/3**.



- Por tanto, T.V.M [1, 3] = $-\frac{1}{3}$.

- Como la T.V.M. es negativa, la función decrece en ese intervalo.

<u>EJEMPLO 2. Derivada de una función en un punto</u>

Calcula $f'(2)$, siendo $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Para calcular la derivada en un punto hay que hallar la tasa de variación media en un intervalo que contenga al punto, y que sea de longitud “muy pequeña”. En este ejemplo, vamos a considerar:

Función $\rightarrow$ $f(x) = \frac{1}{x}$
Variable $\rightarrow$ x
Centro del intervalo $\rightarrow$ 2 (punto en el que queremos calcular la derivada)
Radio del intervalo $\rightarrow$ 0,00001

Introduce los valores igual que has hecho en el ejemplo anterior:

Pulsa $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{8}$.

Escribe:

1 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{X,T,…}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{X,T,…}}$ $\boxed{,}$ 2 $\boxed{,}$ $\boxed{.}$ 0 0 0 0 1 $\boxed{)}$

También puedes recuperar la instrucción anterior pulsando $\boxed{\text{2nd}}$ [ENTRY] dos veces.

Desplaza el cursor a la izquierda y colócalo sobre el 1 (radio del intervalo), teclea $\boxed{.}$ 0 0 0 0 1 $\boxed{)}$.

En la pantalla aparecerá:

n Deriv $\left(\frac{1}{x},\ x,\ 2,\ .00001\right)$

Pulsa ENTER y obtendrás **-.25**

NOTA PARA TI-82

(1) Teclea MATH 8 2nd [Y-VARS] 1 1...

Si lo quieres expresar en forma de fracción, pulsa MATH 1 ENTER y obtendrás $-\frac{1}{4}$.

Por tanto, $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

b) También es posible averiguar el valor de la derivada en un punto, de manera aproximada, sobre la gráfica de la función.

Introduce en Y_1 la función $\frac{1}{x}$ y borra o desactiva las demás funciones.

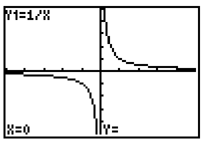
Como queremos encontrar $f'(2)$, basta representar la función para los valores de WINDOW siguientes:

Xmin = –5 ; Xmax = 5 ; Ymin = –5 e Ymax = 5.

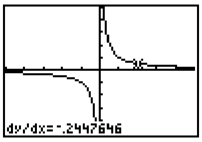
Pulsa WINDOW e introduce estos valores, Xscl = Yscl = 1.

Pulsa 2nd [CALC] 6 (dy/dx)

Aparece en la pantalla:

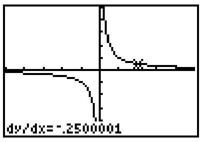


Pulsa ▶ para acercarnos a X = 2. El cursor aparece, por la parte superior de la gráfica, recorriéndola. Lo situamos lo más cerca posible de X = 2. Debido al tamaño del pixel hemos de situarlo en 1.91... o en 2.02... Lo dejamos en este segundo punto y pulsamos ENTER.



Con lo que obtenemos un valor aproximado para $f'(2)$.

TI-83 y TI-83 Plus tienen otra posibilidad gráfica que consiste en teclear:
$\boxed{\text{2nd}}$ [CALC] $\boxed{6}$ 2 $\boxed{\text{ENTER}}$.
↑
Para averiguar $f'(2)$.



Esta aproximación es bastante mejor que la anterior.

EJEMPLO 3. Recta tangente a una función en un punto

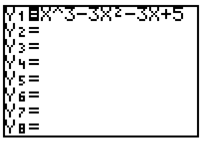
Dibujar la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 5$ en $x = -1$.

Empezamos representando la función:

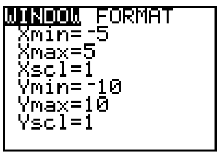
Pulsa $\boxed{\text{Y=}}$ (borra las funciones que haya con $\boxed{\text{CLEAR}}$).

Escribe en Y_1:

$\boxed{\text{X,T,...}}$ $\boxed{\wedge}$ 3 $\boxed{-}$ 3 $\boxed{\text{X,T,...}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 3 $\boxed{\text{X,T,...}}$ $\boxed{+}$ 5



Pulsa $\boxed{\text{WINDOW}}$ e introduce los valores:



Pulsa $\boxed{\text{GRAPH}}$ y ya tienes la gráfica. Ahora queremos trazar la recta tangente en $x = -1$.

- Con TI-82

Pulsa $\boxed{\text{CLEAR}}$ $\boxed{\text{CLEAR}}$.

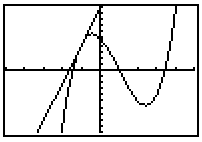
Pulsa $\boxed{\text{2nd}}$ [DRAW] $\boxed{5}$. Aparecerá en la pantalla:

tangent (

Introducimos la función y el punto:

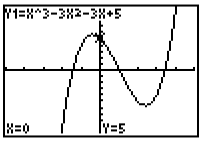
$\underbrace{\boxed{\text{2nd}}\ [\text{Y-VARS}]\ \boxed{1}\ \boxed{1}}_{\text{para escribir } Y_1}\ \boxed{,}\ \boxed{(-)}\ 1\ \boxed{)}\ \boxed{\text{ENTER}}$

Te aparecerá de nuevo la gráfica de la función, y a continuación se trazará la recta tangente en $x = -1$.

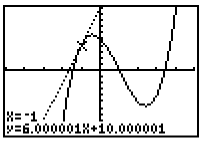


- Con TI-83 y TI-83 Plus

Pulsa $\boxed{\text{2nd}}$ [DRAW] $\boxed{5}$.
Aparece la pantalla



Teclea $\boxed{(-)}$ 1 $\boxed{\text{ENTER}}$ y obtendrás:



Observamos la recta tangente y su ecuación, cuyos coeficientes son aproximados debido al método de cálculo que usa la calculadora.

Deducimos que $Y_1'(-1) = 6$ y la ecuación de la recta tangente es $y = 6x + 10$.

En todos los modelos, para borrar esta u otras rectas tangentes teclear:

$\boxed{\text{2nd}}$ [DRAW] $\boxed{1}$ **(clrDraw)**.

EJEMPLO 4. Puntos de tangente horizontal

Halla los puntos de tangente horizontal de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1}$$

Empecemos representando la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$

Pulsa Y= (si hay alguna función escrita, la puedes borrar con CLEAR).

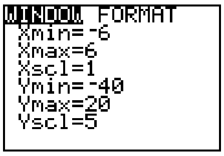
Introduce la función:

X,T,... ^ 3 – 3 X,T,... x^2 – 9 X,T,… – 1

Pulsa ZOOM 6 . La gráfica no cabe en la pantalla.

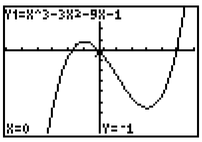
Pulsa WINDOW para introducir los intervalos de valores en los que quieres que varíen x e y.

Para esta función se pueden tomar, por ejemplo, los siguientes:



Para saber qué valores son los adecuados, puedes ir probando distintas posibilidades y ver cómo va quedando la gráfica.

Pulsa TRACE . Aparecerá la gráfica de la función con el cursor sobre la curva y podrás visualizar las coordenadas del punto sobre el que está situado. Puedes moverte por la gráfica con las teclas ◄ y ► .



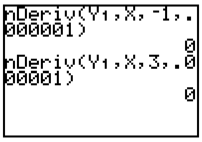
Observa que la función tiene un máximo y un mínimo. Localiza sus coordenadas, situando el cursor lo más cerca posible de esos puntos:

Si te sitúas en el máximo, verás que sus coordenadas son aproximadamente (–1, 4).
Si te sitúas en el mínimo, ves que sus coordenadas son aproximadamente (3, –28).

Además, vemos que no hay más puntos con tangente horizontal. La derivada se anula en $x = -1$ y $x = 3$.

Compruébalo tecleando:
MATH 8 VARS ▶ 1 1 , X,T,... , (–) 1 , . 0 0 0 0 0 1) ENTER [(1)]

2nd ENTRY (desplaza el cursor a la izquierda y sustituye –1 por 3, borra caracteres sobrantes con DEL) ENTER .



NOTAS PARA TI-82
[(1)] Sustituye VARS ▶ por 2nd [Y–VARS]

Puedes conseguir más precisión gráficamente con la opción ZOOM 2 ENTER . Así se amplía la zona en la que está situado el cursor y, moviéndolo sobre la curva con las teclas ◀ , ▶ , ▲ y ▼ , puedes aproximarte más a las coordenadas de los puntos que buscas.

Tienes que pulsar TRACE para poder desplazarte sobre la gráfica.

La opción inversa a ZOOM 2 ENTER es ZOOM 3 ENTER .

Para visualizar la gráfica como la tenías al principio, debes volver a introducir los valores iniciales en WINDOW .

EJEMPLO 5. Crecimiento y decrecimiento de una función

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la función del ejemplo anterior:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$$

Representa la gráfica de la función, tal como se indica en el ejemplo 4. Como ya has localizado el máximo en $x = -1$ y el mínimo en $x = 3$, y tenemos la gráfica, es fácil observar que la función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y es decreciente en $(-1, 3)$.

EJEMPLO 6. Gráfica de una función polinómica

Representa gráficamente la función:

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

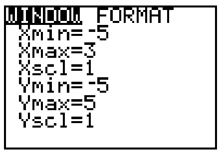
A partir de la gráfica, indica cuáles son los máximos y mínimos de la función, los puntos de corte con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Representación gráfica:

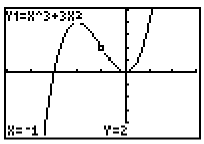
- Pulsa Y= (si hay alguna función escrita, puedes borrarla con CLEAR).
- Introduce la función:

  X,T,... ^ 3 + 3 X,T,... x^2

- Pulsa ZOOM 6.
- Pulsa WINDOW para introducir los intervalos de valores en los que queremos que varíen x e y.
  Para esta función puedes tomar, por ejemplo, los siguientes:



- Pulsa TRACE. Aparecerá la gráfica de la función con el cursor sobre la curva y podrás visualizar las coordenadas del punto sobre el que está situado. Puedes moverte por la gráfica con la teclas ◄ y ►:



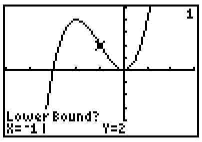
- Observa que la función tiene un máximo y un mínimo.

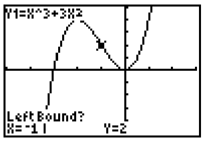
  Averiguamos cuáles son las coordenadas de esos puntos con las opciones

  2nd [CALC] 3 (**minimun**) y
  2nd [CALC] 4 (**maximun**).

  Tecleamos 2nd [CALC] 3

TI-82 TI-83 y TI-83 Plus



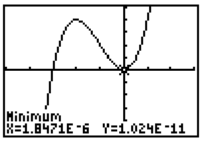


Pulsa $\boxed{\blacktriangleright}$ para acercar el cursor que hay sobre la gráfica al mínimo, aproximadamente hasta $x = -0.3$.
Pulsa $\boxed{\text{ENTER}}$.

Ahora hemos de responder a la pregunta de la calculadora (**Upper Bound?** o **Right Bound?**) volviendo a pulsar $\boxed{\blacktriangleright}$ hasta superar el mínimo. Aproximadamente hasta $x = 0.3$.

Pulsa $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{\blacktriangleleft}$ $\boxed{\text{ENTER}}$.

Depués de unos segundos aparece:



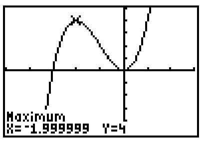
Es decir, <u>el valor del mínimo esta en</u> (0, 0).
Puedes obtener valores aún más aproximados pulsando $\boxed{\text{ZOOM}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{\text{TRACE}}$ y desplazándote por la gráfica.

Obtenemos el punto en el que está el máximo pulsando $\boxed{\text{WINDOW}}$ para restablecer la ventana inicial:
Xmin = –5 ; Xmax = 3 ; Ymin = –5 e Ymax = 5

Pulsa $\boxed{\text{2nd}}$ [CALC] $\boxed{4}$.

Vamos respondiendo a las preguntas de la calculadora como lo hemos hecho antes.
Pulsamos $\boxed{\blacktriangleleft}$ hasta sobrepasar el máximo y $\boxed{\text{ENTER}}$. Después, $\boxed{\blacktriangleright}$ para colocar el cursor a la derecha del máximo y $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{\blacktriangleleft}$ $\boxed{\text{ENTER}}$.

Obtenemos



Por tanto, <u>el máximo está en</u> (–2, 4).

Parece que no hay más puntos con tangente horizontal. Puedes comprobar que la derivada se anula en $x = -2$ y $x = 0$ como lo hicimos en el ejemplo 5.

Puntos de corte con los ejes
Situándote sobre ellos con el cursor, verás que son aproximadamente (–3, 0) y el (0, 0).

Utilizaremos la opción $\boxed{\text{2nd}}$ [CALC] $\boxed{2}$ (**root** en TI-82 y **zero** en TI-83 y TI-83 Plus) para averiguar las coordenadas de esos puntos de corte con el eje X.

Pulsa $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{2}$ y ve respondiendo a las preguntas que hace la calculadora como lo has hecho hasta ahora para encontrar el mínimo y el máximo:

- Desplazar el cursor a la izquierda del primer punto de corte, pulsando $\boxed{\blacktriangleleft}$ y a continuación $\boxed{\text{ENTER}}$.
- Desplazar el cursor a la derecha de ese punto, pulsando $\boxed{\blacktriangleright}$ y después $\boxed{\text{ENTER}}$.
- Pulsar $\boxed{\blacktriangleleft}$ $\boxed{\text{ENTER}}$.

Después de unos segundos aparece de nuevo la gráfica con el cursor sobre el punto que buscábamos y, en la última línea de la pantalla, las coordenadas: $x = -3$, $y = 1E - 12$.

<u>El punto es (–3, 0).</u>

Repitiendo el procedimiento completo obtenemos que <u>el otro punto de corte es (0, 0)</u>.

Para obtener el punto de corte con el eje Y hacemos $\boxed{\text{2nd}}$ [CALC] $\boxed{1}$ (**value**).

Teclea 0 [ENTER] y obtendrás la otra coordenada del punto. Para esta función (0, 0).

Intervalos de crecimiento y decrecimiento
Con lo que ya sabes, y observando la gráfica, ves que la función es creciente en $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en $(-3, 0)$.

Además $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

EJEMPLO 7. Gráfica de una función racional

Representa gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

A partir de la gráfica, di cuál es su dominio de definición, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, los puntos singulares y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

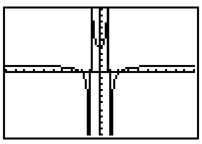
Pulsa [Y=] (si hay alguna función escrita, bórrala con [CLEAR]).

Introduce la función:

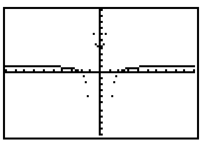
[(] [X,T,...] [x^2] [–] 4 [)] [÷] [(] [X,T,…] [x^2] [–] 1 [)]

Pulsa [ZOOM] [6].

Si tienes seleccionado [MODE] **Connected** aparecerá



Si seleccionas [MODE] **Dot** y pulsas [GRAPH]:



Ten en cuenta que las líneas verticales del primer gráfico no son de la función, pero te sirven para tener una idea sobre el dominio de la función, los puntos de discontinuidad y las asíntotas verticales.

Dominio de definición

Observa que es **R**$-\{-1, 1\}$.

Compruébalo utilizando la opción $\boxed{\text{2nd}}$ [CALC] $\boxed{1}$ (**value**), averiguando el valor de Y_1 para $x = -1$ y para $x = 1$. No obtienes valor para y.

También puedes construir una tabla de valores que contenga a $x = -1$ y $x = 1$. Obtendrás ERROR en la columna de Y_1 para estos valores de x.

Puntos de corte con los ejes

Situándote con el cursor sobre esos puntos, vemos que:

- Corta el eje X en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.
- Corta el eje Y en $(0, 4)$.

Puedes aplicar los procedimientos explicados en el ejemplo anterior.

Asíntotas verticales

Son $x = -1$ y $x = 1$. Puedes, también, escribir la posición de la curva respecto a ellas:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$$

Asíntota horizontal

Al situarte en valores de x cada vez más grandes, ves que y va tomando valores cada vez más próximos a 1, pero menores que 1:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1 \quad \text{(la curva va por debajo de la asíntota)}$$

Cuando $x \to -\infty$, ocurre lo mismo.

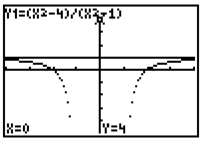
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1 \quad \text{(la curva va por debajo de la asíntota)}$$

Puedes hacerlo desplazando el cursor sobre la gráfica o con una tabla.

Luego $y = 1$ es la asíntota horizontal. Puedes representarla junto a la función de esta manera:

Pulsa $\boxed{\text{Y=}}$. Sitúate con $\boxed{\blacktriangledown}$ en **Y_2=** y escribe: **1**

Pulsa $\boxed{\text{TRACE}}$.



Puntos singulares

Observa que hay un mínimo en (0, 4). La derivada solo se anula en $x = 0$.
Puedes aplicar los procedimientos de los ejemplos anteriores.

Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

Fíjate en que la función es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, 0)$ y creciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

3 AMPLIACIÓN.

LÍMITES Y CONTINUIDAD.

Las teclas básicas que usaremos en esta y en las siguientes unidades son:

Y= Para introducir funciones, así como para editar y modificar las que tuviéramos. Podemos tener simultáneamente hasta 10 funciones, desde $\mathbf{Y_1}$ hasta $\mathbf{Y_0}$, activadas o no.

GRAPH y TRACE. Pulsando una u otra aparecerá la pantalla de gráficos y comenzarán a representarse las funciones que tengamos activadas. Si hemos pulsado **TRACE**, podremos recorrer la gráfica, pulsando ◀ y ▶, y se mostrarán la expresión de la función y las coordenadas del punto de la gráfica en el que se encuentra el cursor.

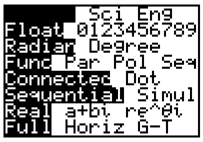
WINDOW Permite fijar la ventana de visualización de las gráficas (valores mínimos y máximos para x e y y escalas para los ejes *OX* y *OY*).

ZOOM Al pulsarla y elegir algunas de las posibilidades que ofrece el menú, las funciones que tengamos activadas se representarán en una ventana definida por esa opción (**ZDecimal**, **ZSquare**, **ZStandard**, **ZTrig** y **ZInteger**).

La opción **Zbox** es particularmente interesante ya que permite acercarse a una zona de la gráfica tanto como queramos.

2nd [FORMAT] Nos permitirá definir algunas características de los gráficos: coordenadas rectangulares o polares, si queremos que aparezcan o no en la pantalla las coordenadas del punto en el que está el cursor (**Coordon** o **Coordoff**), la visualización o no de la cuadrícula (**Gridon** o **Gridoff**) y de los ejes de coordenadas (**Axeson** o **Axesoff**), etc.

MODE Las dos primeras opciones del menú permiten fijar la presentación de los datos y resultados numéricos en la pantalla. Habitualmente seleccionaremos la opción **Degree**, pero para algunas funciones usaremos **Radian**.



La cuarta opción, habitualmente **Func**, permite también seleccionar **Par**, **Pol**, o **Seq** para representar funciones en paramétricas, polares o sucesiones.

La siguiente opción, **Connected** o **Dot**, dibuja las gráficas punto a punto y une esos puntos, si se ha seleccionado **Connected**, o no, seleccionando **Dot**. Utilizaremos la segunda opción para representar funciones a trozos y cuando estudiemos el comportamiento de gráficas con asíntotas verticales.

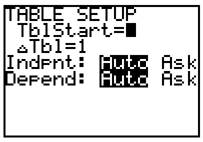
Las opciones **Sequential** o **Simul** representan varias gráficas de una en una o todas a la vez, respectivamente.

Por fin, las últimas opciones, **Full**, **Horiz**, o **G–T**, representan una función en la pantalla completa, dividida horizontalmente con una pantalla de texto abajo o dividida verticalmente con la tabla de la función a la derecha, respectivamente.

2nd [CALC] Calcula valores de la función, puntos de corte con OX, mínimos y máximos relativos, puntos de intersección entre dos gráficas, el valor de la derivada en un punto y la integral definida entre dos valores de x.

2nd [TABLE] Permite visualizar una tabla de valores de todas las funciones que tengamos activadas en el editor de funciones. Podemos desplazarnos sobre la pantalla que presenta pulsando las cuatro teclas de mover el cursor.

2nd [TBLSET] En la pantalla que aparece podremos definir el primer valor de x que queremos visualizar en la tabla y el incremento de los valores de x. Las dos columnas de la tabla se llenarán automáticamente, seleccionando **Auto** en **Indpnt** y en **Depend**, o iremos tecleando valores de uno en uno, y pulsando ENTER, para completarla, si seleccionamos **Ask** para **Indpnt** o **Depend**.



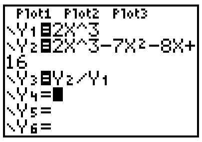
<u>Ejemplo: ESTUDIO DE LÍMITES EN EL INFINITO.</u>

Estudiamos la función $f(x)=\dfrac{2x^3-7x^2-8x+16}{2x^3}$ **cuando** $x\to+\infty$ **y** $x\to-\infty$**.**

Introduce la expresión de la función en el editor de funciones, pulsando Y= y tecleando la fórmula, teniendo en cuenta que tanto el numerador como el denominador han de ir entre paréntesis.

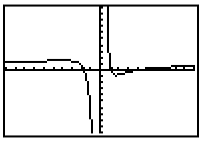
O bien, como el numerador y el denominador son las funciones **Y_2** e **Y_1**, respectivamente, del ejemplo 1, podemos expresar $f(x) = Y_2 / Y_1$.

Para ello, coloca el cursor a la derecha del signo = en **Y_3** y tecleamos VARS ▶ 1 2 ÷ VARS ▶ 1 1.



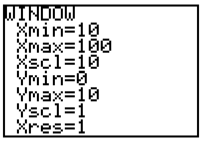
Debemos tener desactivadas todas las funciones que haya en el editor, salvo **Y_3**.

Representa la función pulsando ZOOM 6:

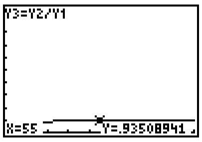


Vamos a visualizar la función alejándonos de $x = 0$ hacia la derecha $(x \to +\infty)$. Por lo que vemos, parece que la función crece, despacio, a partir de, aproximadamente, $x = 2$.

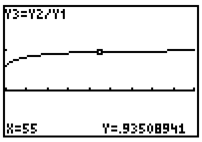
Pulsa WINDOW y modifica los valores para ver la función en $[10, 100] \times [0, 10]$.



Pulsa GRAPH o TRACE:



Vuelve a pulsar WINDOW para modificar los valores mínimo y máximo de y, de forma que la tendencia de la gráfica se aprecie mejor. Introduce **$Y_{min}=-1$** e **$Y_{max}=2$**. Pulsa TRACE.



Si pulsas ▶, desplazas el cursor hacia la derecha: los valores de x van aumentando, los de y también, y parece que estos últimos permanecen por debajo de 1.

Vamos a representar ahora la función **$Y_4=1$** para comprobar esto último. Pulsa Y= e introduce **$Y_4=1$**, pulsa TRACE. Parece que las dos gráficas se confunden.

Desplaza el cursor hacia la derecha, casi hasta el borde de la pantalla, y pulsa $\boxed{\text{ZOOM}}$ $\boxed{2}$ (**2: Zoom In**) $\boxed{\text{ENTER}}$. Verás cómo primero se dibuja la función $\mathbf{Y_3}$ y después la recta $\mathbf{Y_4=1}$, muy próxima a la curva y por encima de ella.

Pulsando $\boxed{\text{TRACE}}$ el cursor se colocará en una de las dos gráficas y pulsando $\boxed{\blacktriangle}$ y $\boxed{\blacktriangledown}$ lo desplazaremos de una a otra.

Situando el cursor en la gráfica de abajo y pulsando $\boxed{\blacktriangleright}$ verás que los valores de y siguen aumentando acercándose a 1.

Por tanto, podríamos afirmar que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-7x^2-8x+16}{2x^3}=1$$

Y que la recta $y=1$ es **asíntota horizontal** de $f(x)$ (por la derecha).

a) Visualiza una tabla de valores de la función $f(x)$ que comience en $x = 100$ y que aumente de 100 en 100 para comprobar, de nuevo, el límite anterior.

¿Cuánto vale la función para $x = 2\,000$?

Pulsa $\boxed{\text{2nd}}$ [TBLSET] y selecciona **Ask** para la variable x (**Indpnt**). Pulsa $\boxed{\text{2nd}}$ [TABLE]. ¿Cuánto vale la función para $x = 10\,000$? ¿Y para $x = 100\,000$?

b) Pulsa $\boxed{\text{WINDOW}}$ e introduce $\mathbf{X_{min}=-100}$, $\mathbf{X_{max}=-10}$, $\mathbf{X_{scl}=10}$, $\mathbf{Y_{min}=-1}$, $\mathbf{Y_{max}=2}$, $\mathbf{Y_{scl}=1}$.

Pulsa $\boxed{\text{TRACE}}$. ¿Qué ves ahora en la pantalla?

¿Podrías decir el valor de $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-7x^2-8x+16}{2x^3}$?

¿Tiene asíntota horizontal por la izquierda la función?

c) Comprueba lo anterior con una tabla de valores en la que x tome valores decrecientes a partir de -1000 de -100 en -100. ¿Cuánto vale la función para $x=-2\,500$?

¿Cuánto vale la función para $x=-10\,000$? ¿Y para $x=-100\,000$?

Ejemplo: FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS.

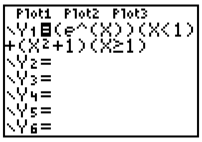
Estudiar el comportamiento de las funciones siguientes en $x=1$:

a) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<1 \\ x^2+1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ **b)** $g(x)=2x-\dfrac{|x-1|}{x-1}$

a) Para introducir en $\mathbf{Y_1}$ la expresión de $f(x)$, pulsamos $\boxed{\text{Y=}}$ y con el cursor a la derecha de $\mathbf{Y_1}$ tecleamos:

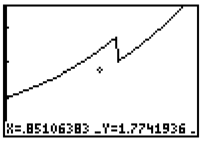
$$\boxed{(}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{e^x}\ \boxed{X, T, ...}\ \boxed{)}\ \boxed{)}\ \boxed{(}\ \boxed{X, T, ...}\ \overbrace{\boxed{\text{2nd}}\ [\text{TEST}]\ \boxed{5}}^{<1}\ \boxed{1}\ \boxed{)}$$

$$\boxed{+}\ \boxed{(}\ \boxed{X, T, ...}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{)}\ \boxed{(}\ \boxed{X, T, ...}\ \underbrace{\boxed{\text{2nd}}\ [\text{TEST}]\ \boxed{4}}_{\geq 1}\ \boxed{1}\ \boxed{)}$$

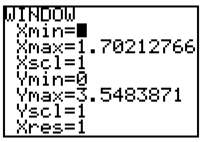


Borra o desactiva las demás funciones. Pulsa $\boxed{\text{ZOOM}}$ $\boxed{6}$. Vamos a utilizar la opción $\boxed{\text{ZOOM}}$ $\boxed{1}$ para acercarnos a la zona de la gráfica que nos interesa. Pulsa $\boxed{\text{ZOOM}}$ $\boxed{1}$; el cursor aparece en (0, 0). Pulsa $\boxed{\text{ENTER}}$ y desplázalo hacia la derecha hasta superar $x = 1$.

Pulsa ahora $\boxed{\blacktriangle}$ para definir la altura de la nueva ventana hasta superar la "unión" de los trozos de gráfica. Pulsa $\boxed{\text{ENTER}}$.



Pulsando $\boxed{\text{WINDOW}}$ verás los límites de nuestra ventana actual.



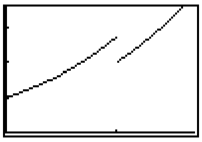
En $x = 1$ la función da un salto desde $e = 2{,}71...$ hasta 2, que aparece dibujado en la gráfica porque la calculadora está trabajando en modo **Connected**.

Pulsa $\boxed{\text{MODE}}$, baja el cursor a la quinta línea, colócalo sobre **Dot** y pulsa $\boxed{\text{GRAPH}}$.

Ahora aparece la gráfica de la función sin la línea vertical que unía los extremos de los dos trozos.

Vemos en la gráfica que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = e \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$



Pulsando $\boxed{\text{TRACE}}$ puedes desplazar el cursor sobre la gráfica y visualizar las coordenadas de los puntos por los que va pasando.

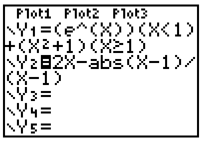
Por tanto, podemos afirmar que $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe. Una tabla de valores que comience en $x = 0{,}99$ con incrementos de 0,001 servirá también para comprobar lo anterior.

Vuelve a pulsar $\boxed{\text{MODE}}$ para seleccionar la opción más habitual, **Connected**.

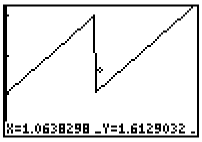
b) Desactiva $\mathbf{Y_1}$ y teclea en $\mathbf{Y_2}$:

$\boxed{2}$ $\boxed{\text{X, T, ...}}$ $\boxed{-}$ $\underbrace{\boxed{\text{MATH}}\ \boxed{\blacktriangleright}\ \boxed{1}}_{abs(}$ $\boxed{\text{X, T, ...}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{1}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\div}$

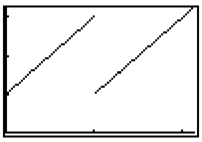
$\boxed{(}$ $\boxed{\text{X, T, ...}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{1}$ $\boxed{)}$



Pulsa $\boxed{\text{ZOOM}}$ $\boxed{6}$ y vuelve a utilizar la opción $\boxed{\text{ZOOM}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ para definir una ventana en la que se encuentre la zona que nos interesa:



El gráfico es similar al del ejemplo anterior. Pulsa $\boxed{\text{MODE}}$ y selecciona la opción **Dot,** y vuelve a pulsar $\boxed{\text{GRAPH}}$.



Pulsando $\boxed{\text{TRACE}}$ podrás recorrer la gráfica y concluir que $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 3$ y $\lim_{x \to 1^+} g(x) = 1$. Y que, por tanto, $\lim_{x \to 1} g(x)$ no existe.

DERIVADAS.

La calculadora tiene dos opciones para calcular el valor de la derivada en un punto:

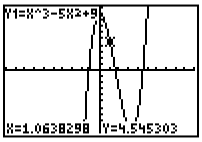
2nd [CALC] **6:*dy/dx*** y MATH **8:nDeriv(**

La primera se utiliza directamente sobre la gráfica de la función y la segunda nos permitirá, desde el editor de funciones, representar gráficamente las derivadas sucesivas de cualquier función.

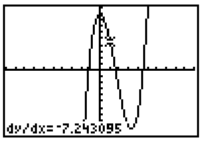
Por ejemplo, dada la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 9$, introduce su expresión en $\mathbf{Y_1}$, desactivando el resto de funciones del editor.

a) Pulsa ZOOM 6 y obtendrás su gráfica.

Para obtener el valor de su derivada en un punto pulsa 2nd [CALC] 6. Ahora puedes desplazar el cursor (que está en (0, 9)) con ▶ y ◀.



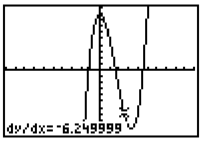
Al pulsar ENTER verás:



Por tanto, $f'(1{,}0638) = 7{,}2431$. Obtenemos resultados numéricos con 4 cifras decimales porque la calculadora está trabajando con esa cantidad de cifras. Pulsando MODE puedes determinar ese número. Selecciona **Float** en la segunda línea y así estaremos en el modo de coma flotante.

b) De otra forma, puedes volver a pulsar ZOOM 6 y 2nd [CALC] 6. Teclea ahora el valor de la abscisa donde quieres calcular la derivada.

Por ejemplo, 2.5 ENTER y obtendrás:

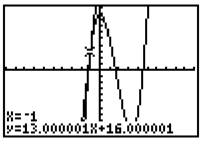


<u>Ejemplo: RECTA TANGENTE A LA GRÁFICA EN UN PUNTO.</u>

Encontrar la recta tangente a la gráfica de ecuación $y = x^3 - 5x^2 + 9$ en $x = -1$.

Teclea en $\mathbf{Y_1}$ la expresión de la función y desactiva el resto de las funciones. Pulsa ZOOM 6.

En la pantalla aparece la gráfica de la función. Pulsa [2nd] [DRAW] [5] y teclea [(–)] [1] [ENTER].



Ha aparecido en la pantalla la recta tangente pedida, que se apreciará con más o menos claridad según las escalas elegidas para los ejes. Puedes cambiar la ventana de representación a $[-5, 5] \times [-10, 10]$ y observarás mejor la recta.

Además, en la última línea está la ecuación de dicha recta:

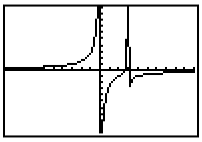
$$y = 13{,}000001x + 16{,}000001$$

Puedes fijar el número de cifras decimales pulsando [MODE] y situando el cursor en la segunda línea sobre el número que desees. A continuación pulsa [ENTER] y [GRAPH], y repite el proceso.

<u>Ejemplo: ASÍNTOTAS Y RAMAS INFINITAS.</u>

Hallar las asíntotas de la función $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{8-3x}{x^2-3x}}$**.**

Si introduces en $\mathbf{Y_1}$ la expresión de la función y pulsas [ZOOM] [6]:



La función parece que tiene una asíntota horizontal, $y = 0$, y dos verticales, $x = 0$ y $x = 3$.

Usando las opciones para elaborar tablas de funciones, cuyas técnicas se explicaron en las unidades anteriores, comprobaremos que:

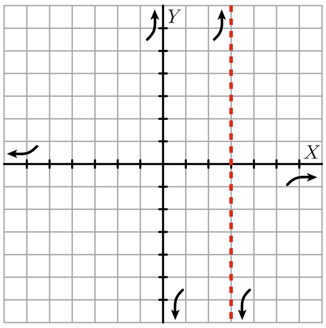
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

También, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

Asímismo, podremos observar que:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y que para valores negativos de x muy grandes en valor absoluto, $f(x)$ es positiva. Sin embargo, si x toma valores positivos muy grandes, $f(x)$ es negativa.

De la gráfica y las tablas deduciremos que la posición de la curva y de sus asíntotas es:



Bastaría unir estos trazos para tener casi construida la gráfica de $f(x)$.

LOCALIZACIÓN DE PUNTOS INTERESANTES

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas, así como los extremos relativos de una gráfica puedes encontrarlos usando las opciones **1**, **2**, **3**, **4** del menú $\boxed{\text{2nd}}$ [CALC]: